

1 Logique, raisonnement par récurrence

1 – De la logique

A – Propositions mathématiques

Définition 1

Proposition mathématique

Une **proposition mathématique** est une phrase écrite en français, avec des symboles mathématiques ou non, contenant un verbe et qui est soit vraie, soit fausse.
Une proposition $\mathcal{P}$ peut dépendre d'une variable x : auquel cas on note $\mathcal{P}(x)$ ou $\mathcal{P}_x$ pour marquer la dépendance de $\mathcal{P}$ en x .

Exemple 2

Voici quelques exemples de propositions mathématiques dépendant ou non d'une variable, vraies ou fausses :

Définition 3

Négation

La **négation** d'une proposition $\mathcal{P}$ est la proposition $\mathcal{Q}$ construite avec les règles de la Proposition 15 (on la note parfois $\text{NON } \mathcal{P}$ ou $\neg \mathcal{P}$) qui est fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie, et inversement.

$\mathcal{P}$	$\text{NON } \mathcal{P}$
V	F
F	V

Exemple 4

Définition 5

Implication

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.
On dit que $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ lorsque le fait que $\mathcal{P}$ soit vraie entraîne que $\mathcal{Q}$ est aussi vraie. On note alors $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. En français, cela correspond à la proposition « Si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est aussi vraie ».

La relation $\Rightarrow$ s'appelle une **implication**. Dans le cas où $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que :

- $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** à $\mathcal{Q}$ (il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie pour que $\mathcal{Q}$ le soit aussi),
- $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** à $\mathcal{P}$ (si $\mathcal{P}$ est vraie, alors nécessairement $\mathcal{Q}$ est aussi vraie).

Exemple 6

- « Si il fait beau, alors je vais à la plage. »
- « Si un polygone a 3 côtés, alors c'est un triangle. »
- $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$

Définition 7

Contraposée et réciproque

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est l'implication $\text{NON } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{NON } \mathcal{P}$.
- La **réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 8

- Considérons l'implication « Si j'habite à Luzarches, alors j'habite en France ».
- Considérons l'implication « Si ABC est rectangle en A , alors $BC^2 = BA^2 + AC^2$ ».

Propriété 9

La contraposée d'une implication est toujours vraie.
La réciproque peut être soit vraie, soit fausse.

Définition 10

On dit que deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **équivalentes** lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$. On note alors $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. En français, cela correspond à la proposition « $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie ».

La relation $\Leftrightarrow$ s'appelle une **équivalence**. Parfois, pour dire que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante (CNS)** à $\mathcal{Q}$.

Exemple 11

B – Connecteurs logiques et quantificateurs

i – Les opérateurs logiques

Définition 12

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ (parfois notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$) est la proposition qui est vraie quand au moins une des deux propositions parmi $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie.
- La proposition $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ (parfois notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$) est la proposition qui est vraie quand $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément vraies.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Conjonction et disjonction

ii – Les quantificateurs

Définition 13

- « (Pour) tout » est ce qu'on appelle le **quantificateur universel**. On le note $\forall$.
- « Il existe » est ce qu'on appelle le **quantificateur existentiel**. On le note $\exists$.

Quantificateurs

Négations des connecteurs et quantificateurs

Proposition 15

- La négation d'un OU est un ET, et inversement.
- La négation d'un « Pour tout » est un « Il existe », et inversement.

Méthode 16 (Négation d'une proposition complexe)

Pour trouver la négation d'une proposition, on identifie chaque élément, et on formule leur négation sans changer l'ordre :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 est pair OU $n(n+1)$ est pair
 $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que n^2 est impair ET $n(n+1)$ est impair

À retenir

« Quand il y a un "Pour tout", on écrit "Soit" » :

Quand on cherche à montrer que quelque chose est vrai, par exemple, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, la démonstration doit commencer par « Soit $x \in \mathbb{R}$ » (ou « Considérons $x \in \mathbb{R}$ »).

Addendum : les connecteurs logiques

Pour les élèves souhaitant se rendre en classe préparatoire ou à l'université, une lecture intéressante sur les connecteurs logiques.

À retrouver sur maths.chaud.xyz/pdf/tspe-chap01-addendum.pdf



Remarque 21 (Dédution et implications)

Dans une démonstration par déduction, on utilise le mot « donc », et jamais le symbole $\implies$. En effet, ils ont des sens très différents :

- $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ signifie que « *Si* $\mathcal{P}$ est vraie, *alors* $\mathcal{Q}$ l'est aussi ».
- « $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{Q}$ » signifie que « *Je sais que* $\mathcal{P}$ est vraie, *j'en déduis que* $\mathcal{Q}$ l'est aussi ».

Dans le cas d'une implication, on ne sait pas que $\mathcal{P}$ est vraie : on dit que dans le cas hypothétique où $\mathcal{P}$ serait vraie, alors $\mathcal{Q}$ le serait aussi.

À retenir : Bien que légèrement abusive, en Terminale on se contentera de retenir la règle suivante :

Dans une démonstration, on n'utilise JAMAIS le symbole $\implies$.
 (On utilise « DONC » pour exprimer la conséquence.)

Application 22

Une réunion de mathématiciens et mathématiciennes du monde entier a lieu à Paris. Les mathématicien(ne)s américain(e)s portent tous et toutes un chemise rouge.

- Un convive vêtu d'une chemise blanche franchit la porte. Est-il américain ?
- Une convive vêtue d'une chemise rouge franchit la porte. Est-elle américaine ?
- On annonce l'arrivée d'un convive allemand. Peut-il porter une chemise rouge ?
- Une convive américaine arrive portant un manteau ? Peut-elle porter une chemise rouge ?

2 – Les différents types de raisonnement

A – Les contre-exemples

Méthode 23 (Utiliser un contre-exemple)

Pour montrer qu'une proposition est fausse, on peut chercher un **contre-exemple**, c'est-à-dire une situation qui met la proposition en défaut.

Exemple 24

À l'aide d'un contre-exemple, montrons que l'affirmation « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 1 > 0$ » est fausse :

Application : exercice 1.

B – Le raisonnement par déduction

Définition 25

Raisonnement déductif

Le **raisonnement déductif** prend la forme suivante : partant d'un point de départ $\mathcal{A}$ (une hypothèse), on montre une conséquence de $\mathcal{A}$, puis une conséquence de cette conséquence, etc. en cascade jusqu'à arriver au point d'arrivée $\mathcal{B}$.

Un raisonnement par déduction repose essentiellement sur les connecteurs logiques « donc », « or » et « car » et leurs synonymes.

Exemple 26 (Rédaction-type)

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est divisible par 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$, donc $n^3 - n$ peut s'écrire comme le produit de trois nombres entiers consécutifs. Or dans trois entiers consécutifs, au moins l'un est divisible par 3, donc leur produit est divisible par 3 (car au moins d'un des facteurs l'est), donc $n^3 - n$ est divisible par 3.

Application : exercice 2.

C – Le raisonnement par contraposée

Définition 27

Contraposée d'une implication

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

La **contraposée** de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est l'implication $(\text{NON } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{NON } \mathcal{P})$.

On rappelle que sans les notations mathématiques, l'implication s'écrit « **SI** $\mathcal{P}$ est vraie **ALORS** $\mathcal{Q}$ aussi », et sa contraposée s'écrit alors « **SI** $\mathcal{Q}$ est fausse **ALORS** $\mathcal{P}$ aussi. ».

Exemple 28

Vous avez vu en classe de quatrième que le théorème de Pythagore stipule que :

« **SI** ABC est rectangle en A **ALORS** $BC^2 = AB^2 + AC^2$. »

Sa contraposée est donc :

« **SI** $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ **ALORS** ABC n'est pas rectangle en A . »

À ne pas confondre avec la réciproque !

Proposition 29

La contraposée d'une implication a même valeur de vérité que celle-ci.

Exemple 30 (Rédaction-type)

Pour démontrer une implication, il est parfois plus simple de démontrer sa contraposée.

Montrons par contraposée que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.

Application : exercices 3, 4, 5, 6.

D – Le raisonnement par l'absurde

Raisonnement par l'absurde

Définition 31

Raisonnement par l'absurde signifie que l'on suppose que la proposition que l'on souhaite montrer est fausse (autrement dit, on suppose vraie sa négation), et on montre que cette supposition *contredit* les hypothèses, autrement dit entraîne une *absurdité*.

Exemple 32 (Rédaction-type)

Montrons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons le contraire : supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. Il existe donc p et q deux nombres entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $p = q\sqrt{2}$,

puis que $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair (voir l'Exemple 30). On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$, donc $2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2$, donc $q^2 = 2k^2$. Par conséquent, q^2 est pair, donc q est aussi pair : c'est absurde, car p et q sont supposés premiers entre eux.

Ainsi, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Application : exercice 7, 8.

E – Le raisonnement par disjonction de cas

Définition 33

Disjonction de cas

Dans une démonstration d'une proposition dépendant d'une variable, il est parfois utile de séparer plusieurs sous-cas complémentaires : par exemple, selon le signe de x , selon la parité de n , ...

Exemple 34 (Rédaction-type)

Montrons que le produit de trois entiers consécutifs est toujours divisible par 3.

Application : exercice 9.

3 – Le raisonnement par récurrence

Définition 35

Principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant d'un entier naturel n , soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si :

- $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie,
- Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$ (on dit que la proposition $\mathcal{P}_n$ est **héréditaire**),

alors pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

C'est ce qu'on appelle le **principe de récurrence**. Il s'utilise quand on veut montrer qu'une proposition est vraie pour tout entier naturel.

Remarque 36

Le principe de récurrence est comme une formalisation mathématique de l'idée des dominos : si on pousse le premier domino et que chaque domino entraîne le suivant, alors tous les dominos tomberont.

Une démonstration par récurrence se déroule toujours en **trois temps** :

- ① **Initialisation** : on montre que la proposition est vraie au premier rang n_0 (qui sera l'immense majorité du temps, soit le rang 0, soit le rang 1) ;
- ② **Hérédité** : on suppose que la proposition est vraie à un rang n quelconque (c'est notre **hypothèse de récurrence**) et on montre que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire qu'elle est vraie au rang $n + 1$;
- ③ **Conclusion** : on conclut la démonstration en invoquant le principe de récurrence.

Exemple 37

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $2^n > n$.

Exemple 38

Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Remarque 39

L'initialisation est tout aussi importante que l'hérédité ! En effet, une proposition peut être héréditaire, mais toujours fausse... Par exemple, $\mathcal{P}(n)$: « 2^n est divisible par 3 » est héréditaire, mais évidemment toujours fausse.

Prouvons enfin une inégalité bien pratique :

Propriété 40**Inégalité de Bernoulli**

Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

Démonstration (Exigible)**Application 41**

Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r . On rappelle qu'elle est définie par la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

Application 42

Soit (v_n) la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q . On rappelle qu'elle est définie par la relation $v_{n+1} = v_n \times q$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $v_n = v_0 \times q^n$.

Application 43

Soit q un nombre réel différent de 1.

Montrer que pour tout entier naturel n , on a $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Exercice 44

On pose (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0,3u_n + 7$. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq 10$.

4 – Rappels sur les suites

Dans cette partie, on revient sur quelques propriétés vues en classe de Première, afin de les démontrer par récurrence.

Rappels sur les suites

Si vous avez oublié votre cours sur les suites, revenez sur votre cours de 1^{ère} spé !
Vous pouvez retrouver le mien sur <https://maths.chaud.xyz/pdf/1spe-chap7-cours.pdf>

