

1 Raisonnement par récurrence

1 – De la logique

B – Connecteurs logiques et quantificateurs

iii – Les connecteurs logiques

Définition 17

Implication et équivalence

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- ▶ La proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (lue « $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$ ») est une autre proposition, qui stipule que **SI** $\mathcal{P}$ est vraie, **ALORS** $\mathcal{Q}$ est aussi vraie.
- ▶ La proposition $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ (lue « $\mathcal{P}$ **est équivalente à** $\mathcal{Q}$ ») est une autre proposition, qui stipule que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont toujours la même valeur de vérité.

Remarque 18

On peut dresser les tables de vérité de l'implication et de l'équivalence, bien que pour la première, la situation où $\mathcal{P}$ est fausse est un peu contre-intuitive, et se traduit mal dans le langage courant.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Proposition 19

Double implication

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \text{ a même valeur de vérité que } \begin{cases} \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \\ \text{ET} \\ \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P} \end{cases}$$

Application 20

En dressant des tables de vérité,

- 1▶ Démontrer la proposition précédente.
- 2▶ Démontrer que $\text{NON} (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ a même valeur de vérité que $\mathcal{P}$ ET $(\text{NON } \mathcal{Q})$.
- 3▶ Démontrer que $\text{NON} (\mathcal{P} \text{ ET } \mathcal{Q})$ a même valeur de vérité que $(\text{NON } \mathcal{P})$ OU $(\text{NON } \mathcal{Q})$.
- 4▶ Démontrer que $\mathcal{P} \text{ ET } (\mathcal{Q} \text{ OU } \mathcal{R})$ a même valeur de vérité que $(\mathcal{P} \text{ ET } \mathcal{Q})$ OU $(\mathcal{P} \text{ ET } \mathcal{R})$ (on parle de distributivité!)