

## 7

# Suites arithmétiques

## Suites géométriques

### 1 – Modèle de croissance linéaire : les suites arithmétiques

#### A – Définition explicite, définition récurrente

##### Définition 1

##### Suites arithmétiques

Une *suite arithmétique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où  $r \in \mathbb{R}$  est appelé *raison* de la suite  $u$ .

On peut schématiser une suite arithmétique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1}$$

Une suite arithmétique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *ajoutant* toujours la même quantité.

##### Exemple 2

La suite  $u$  définie par son terme initial  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence pour  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2$ , est une suite arithmétique de raison 2. Les premiers termes de cette suite sont ...

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang  $n$  à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de  $u_0$  aux autres termes :

- ▶ De  $u_0$  à  $u_1$ , on ajoute 1 fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $1 \times r$ .
- ▶ De  $u_0$  à  $u_2$ , on ajoute 2 fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $2 \times r$ .
- ▶ De  $u_0$  à  $u_3$ , on ajoute 3 fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $3 \times r$ .
- ▶ De  $u_0$  à  $u_4$ , on ajoute 4 fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $4 \times r$ .

On devine alors que pour passer de  $u_0$  à  $u_n$ , on ajoute  $n$  fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $n \times r$ .

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} u_5 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} u_n$$

$+nr$

##### Proposition 3

##### Explicitation d'une suite arithmétique

Soit  $u$  une suite arithmétique de terme initial  $u_0$  et de raison  $r$ . L'expression explicite du terme général de  $u$  est donné pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_n = u_0 + nr$$

##### Démonstration

Soient  $(u_n)$  la suite arithmétique de premier terme  $u_0$  et de raison  $r$ , et  $(v_n)$  la suite définie explicitement par  $v_n = u_0 + nr$ . Pour démontrer la propriété, on montre que les deux suites sont identiques.

- On a  $v_0 = u_0 + 0 \times r$ , donc  $u_0 = v_0$ .
- De plus, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$v_{n+1} = u_0 + (n+1) \times r = u_0 + nr + r = v_n + r$$

Les deux suites vérifient donc la même relation de récurrence.

Donc pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = v_n$ .

##### Exemple 4

La suite arithmétique  $u$  de terme initial  $u_0 = 3$  et de raison 6 vérifie la relation de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 6$ . Elle s'exprime explicitement, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3 + 6n$ .

##### Remarque 5

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- ▶ De  $u_1$  à  $u_2$ , on ajoute 1 fois  $r$ .
- ▶ De  $u_1$  à  $u_3$ , on ajoute 2 fois  $r$ .
- ▶ De  $u_1$  à  $u_4$ , on ajoute 3 fois  $r$ .

On devine alors que pour passer de  $u_1$  à  $u_n$ , on ajoute  $n - 1$  fois  $r$ , autrement dit on ajoute  $(n - 1) \times r$ .

$$u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{\cdots} u_n$$

$+(n-1) \times r$

De manière générale, si le terme initial est de rang  $p$ , alors l'expression explicite est, pour tout  $n \geq p$ ,

$$u_n = u_p + (n - p) \times r.$$

B – Représentation graphique, variations

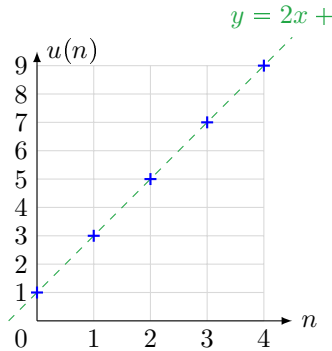
Propriété 6

Les points du nuage de points représentant la suite arithmétique de terme initial  $u_0$  et de raison  $r$  sont tous alignés, le long de la droite d'équation  $y = rx + u_0$ .

En effet, cette suite s'écrit explicitement  $u_n = rn + u_0$  : autrement dit, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les points de coordonnées  $(n; u(n))$  vérifient l'équation de droite  $y = rx + u_0$ . C'est pour cette raison que l'on dit que les suites arithmétiques modélisent des situations de croissance *linéaire*.

Exemple 7

Représentation graphique de la suite arithmétique de terme initial  $u_0 = 1$  et de raison 2 :

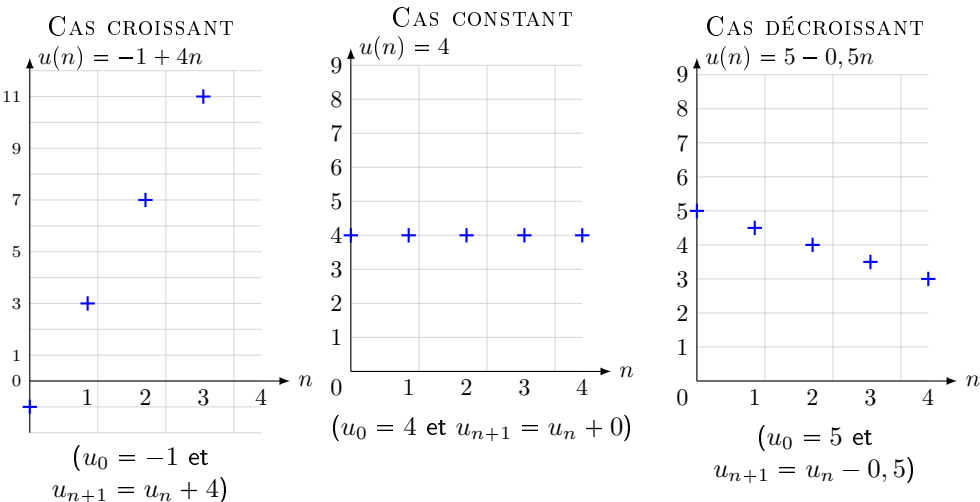


Proposition 8

Soit  $u$  une suite arithmétique de raison  $r$ .

- ▶ Si  $r > 0$ , alors  $u$  est strictement croissante.
- ▶ Si  $r = 0$ , alors  $u$  est constante.
- ▶ Si  $r < 0$ , alors  $u$  est strictement décroissante.

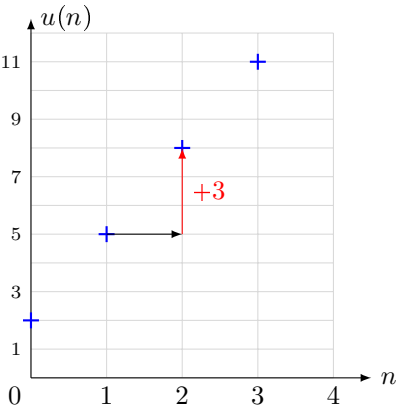
Exemple 9



Méthode 10 (Déterminer l'expression à partir de la représentation graphique)

Si tous les points sont alignés sur une droite horizontale, alors la suite est constante, et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est égal à l'ordonnée de ces points.  
Sinon, deux cas de figure : soit  $u$  est croissante, c'est-à-dire que plus  $n$  est grand, plus les points « montent », soit  $u$  est décroissante, c'est-à-dire que plus  $n$  est grand, plus les points « descendent ».

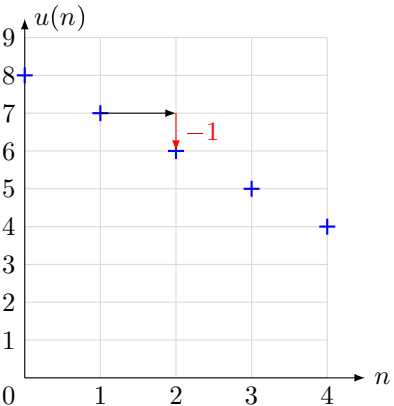
CAS CROISSANT



- 1▶ Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit  $u_0 = 2$ .
- 2▶ On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on monte de 3, donc la raison est +3.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2 + 3n$ .

CAS DÉCROISSANT



- 1▶ Le terme initial est l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0 : ici, on lit  $u_0 = 8$ .
- 2▶ On mesure l'accroissement entre deux points successifs : ici, d'un point au suivant, on descend de 1, donc la raison est -1.

Ainsi, l'expression explicite de la suite est, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 8 - 1n = 8 - n$ .

## 2 – Modèle de croissance exponentielle : les suites géométriques

### A – Définition explicite, définition récurrente

#### Définition 11

#### Suites géométriques

Une *suite géométrique* est une suite qui satisfait une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

où  $q \in \mathbb{R}$  est appelé *raison* de la suite  $u$ .

On peut schématiser une suite géométrique de la manière suivante :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1}$$

Une suite géométrique modélise une situation dans laquelle l'évolution d'un pas à l'autre se fait en *multipliant* toujours la même quantité. Typiquement, un taux d'évolution se modélise par une suite géométrique.

#### Exemple 12

La suite  $u$  définie par son terme initial  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence pour  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = 2 \times u_n$ , est une suite géométrique de raison 2.

#### Remarque 13

La suite  $u$  définie par son terme initial  $u_0 = 1$  et par la relation de récurrence pour  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = n \times u_n$  n'est pas une suite géométrique : la quantité multipliée à chaque étape n'est pas constante, elle change en fonction du rang.

De la définition par récurrence, on ne connaît que le terme initial ; pour expliciter la suite, on doit exprimer le terme général de rang  $n$  à partir de cette seule information, en exploitant la relation de récurrence. Cherchons une logique pour le passage de  $u_0$  aux autres termes :

- ▶ De  $u_0$  à  $u_1$ , on multiplie 1 fois par  $q$ , autrement dit on multiplie par  $q$ .
- ▶ De  $u_0$  à  $u_2$ , on multiplie 2 fois par  $q$ , autrement dit on multiplie par  $q \times q = q^2$ .
- ▶ De  $u_0$  à  $u_3$ , on multiplie 3 fois par  $q$ , autrement dit on multiplie par  $q \times q \times q = q^3$ .

On devine que pour passer de  $u_0$  à  $u_n$ , on multiplie  $n$  fois  $q$ , autrement dit on multiplie  $q^n$ .

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \xrightarrow{\times q} \cdots \xrightarrow{\times q} u_n$$

$\times q^n$

#### Proposition 14

#### Explicitation d'une suite géométrique

Soit  $u$  une suite géométrique de terme initial  $u_0$  (attention, le premier rang est 0 !) et de raison  $q$ . L'expression explicite du terme général de  $u$  est donné pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

#### Exemple 15

La suite géométrique  $u$  de terme initial  $u_0 = 3$  et de raison 6 :

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 6 \times u_n$ ,
- ▶ S'exprime explicitement, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3 \times 6^n$

La suite arithmétique  $u$  de terme initial  $u_0 = 0,4$  et de raison  $\frac{1}{9}$  :

- ▶ Vérifie la relation de récurrence, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n \times \frac{1}{9}$ ,
- ▶ S'exprime explicitement, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 0,4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$

#### Remarque 16

Si le rang initial n'est pas 0, alors l'expression explicite change. Il suffit de répéter le raisonnement précédent. Par exemple, si le premier rang est 1 :

- ▶ De  $u_1$  à  $u_2$ , on multiplie 1 fois par  $q$ .
- ▶ De  $u_1$  à  $u_3$ , on multiplie 2 fois par  $q$ .
- ▶ De  $u_1$  à  $u_4$ , on multiplie 3 fois par  $q$ .

On devine alors que pour passer de  $u_1$  à  $u_n$ , on multiplie  $n - 1$  fois  $q$ , autrement dit on multiplie par  $q^{n-1}$ .

$$u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \cdots \xrightarrow{\times q} u_n$$

$\times q^{n-1}$

De manière générale, si le terme initial est de rang  $p$ , alors l'expression explicite est, pour tout  $n \geq p$ ,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

## B – Représentation graphique, variations

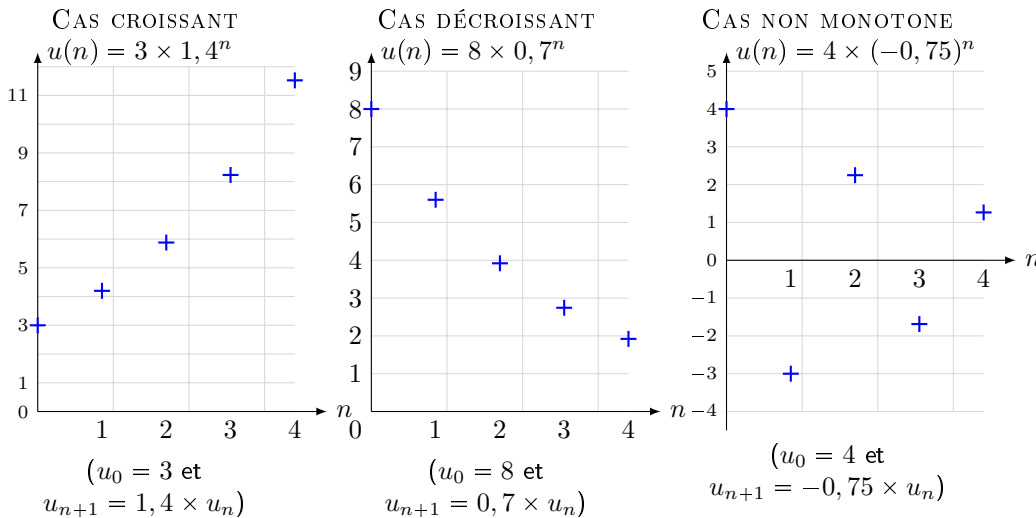
### Proposition 17

- ▶ Si  $q > 1$ , alors la suite  $(q^n)$  est strictement croissante.
- ▶ Si  $q = 1$  ou  $q = 0$ , alors la suite  $(q^n)$  est constante.
- ▶ Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $(q^n)$  est strictement décroissante.
- ▶ Si  $q < 0$ , alors la suite  $(q^n)$  n'est pas monotone.

**Important :** pour une suite géométrique  $(u_n)$  de premier terme  $u_0$  et de raison  $q$  :

- ▶ si  $u_0 > 0$ , la suite  $(u_n)$  a le même sens de variation que la suite  $(q^n)$ ;
- ▶ si  $u_0 < 0$ , la suite  $(u_n)$  a le sens de variation contraire de celui de la suite  $(q^n)$ .

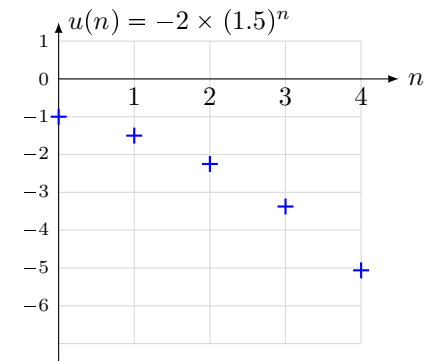
### Exemple 18



### Exemple 19 Attention au premier rang !

Il faut prendre garde : le sens de variation ne dépend pas *que* de la raison. Si le premier terme est négatif, le sens de variation de la suite est inversé. Prenons l'exemple de la suite  $(u_n)_n$  définie par

$$u_n = -2 \times 1,5^n.$$



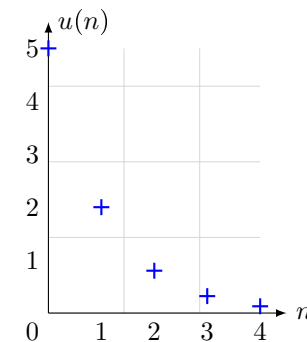
### Méthode 20 (Déterminer l'expression à partir de sa représentation graphique)

Pour déterminer l'expression explicite d'une suite géométrique à partir de sa représentation graphique,

- 1▶ On lit le terme initial à l'ordonnée du premier point, d'abscisse 0,
- 2▶ On lit les ordonnées de deux termes consécutifs  $u_n$  et  $u_{n+1}$ ,
- 3▶ Comme  $u_{n+1} = q \times u_n$ , on retrouve la raison par la formule  $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

### Exemple 21

Considérons la suite géométrique dont la représentation graphique est la suivante :



On lit  $u_0 = 5$  et  $u_1 = 2$ . Comme  $u_1 = q \times u_0$ , on en déduit que  $q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{5} = 0,4$ .  
 Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 5 \times 0,4^n$ .

### 3 – Sommes

#### A – Somme des premiers entiers

##### Proposition 22

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on a  $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

##### Démonstration

##### Méthode 23 Calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique

Calculer la somme suivante :  $S = 33 + 36 + 39 + \cdots + 267$

De manière générale, on peut prouver, de la même manière que la démonstration précédente, l'égalité valable pour  $(u_n)$  suite arithmétique :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

##### Exemple 24

Déterminer  $S = 10 + 13 + 16 + \cdots + 42$ .

#### B – Somme des premières puissances d'un entier $q$

##### Proposition 25

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout réel  $q$  différent de 1, on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

##### Démonstration

##### Proposition 26

Soit  $(u_n)$  une suite géométrique de premier terme  $u_0$  et de raison  $q \neq 1$ , alors pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

##### Démonstration

##### Exemple 27

Déterminer  $S = 3 + 6 + 12 + 24 + \cdots + 192$ .

4 – Problème de seuil

Un *problème de seuil* est la question suivante : étant donnée une suite croissante (respectivement décroissante), à partir de quel rang passe-t-elle au-dessus (respectivement en-dessous) d'une certaine valeur ?

Méthode 28 (Avec un tableur – cas par récurrence)

Considérons la suite arithmétique croissante  $u$  de terme initial  $u_0 = 10$  et de raison 4. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n + 4$ . On cherche à savoir quand la suite  $u$  dépasse la valeur 40.

1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).

2► Dans la colonne B, on inscrit le terme initial, puis on transcrit la formule de récurrence dans la cellule suivante. On étend ensuite cette formule.

3► On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite  $u$  dépasse le seuil (ici, quand elle dépasse la valeur 40) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici,  $u$  dépasse 40 à partir du rang 10).

|    | A   | B     |
|----|-----|-------|
| 1  | $n$ | $u_n$ |
| 2  | 0   | 10    |
| 3  | 1   | =B2+4 |
| 4  | 2   | 18    |
| 5  | 3   | 22    |
| 6  | 4   | 26    |
| 7  | 5   | 30    |
| 8  | 6   | 34    |
| 9  | 7   | 38    |
| 10 | 8   | 42    |

Méthode 29 (Avec un tableur – cas explicite)

Considérons la suite géométrique décroissante  $u$  de terme général donné pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 200 \times 0,8^n$ . On veut savoir à partir de quel rang  $u$  passe en-dessous de la valeur 100.

1► Dans la colonne A, on affiche les rangs à partir de 0. (Rappel : il suffit d'écrire 0 et 1, les surligner avec le curseur, et étendre la boîte : le tableur mettra automatiquement les nombres suivants).

2► Dans la colonne B, on inscrit l'expression qui définit  $u_n$  en fonction de  $n$ . On étend ensuite cette formule.

3► On parcourt la colonne B pour chercher le moment où la suite  $u$  dépasse le seuil (ici, quand elle passe en-dessous de la valeur 100) : il suffit alors de lire le rang correspondant dans la colonne A (ici,  $u$  passe en-dessous de 100 à partir du rang 4).

|    | A   | B           |
|----|-----|-------------|
| 1  | $n$ | $u_n$       |
| 2  | 0   | =200*0,8^A2 |
| 3  | 1   | 160.00061   |
| 4  | 2   | 128.00098   |
| 5  | 3   | 102.40117   |
| 6  | 4   | 81.92123    |
| 7  | 5   | 65.53723    |
| 8  | 6   | 52.42998    |
| 9  | 7   | 41.94414    |
| 10 | 8   | 33.55544    |

**Remarque :** Les machines ne peuvent pas traiter des nombres avec une précision infinie, et doivent faire des arrondis : ici, par exemple, les premiers termes de  $u$  sont 200, 160 et 128, mais on constate que ce tableur souffre d'erreurs d'arrondis (les erreurs sont exagérées pour l'exemple...).

Méthode 30 (Cas arithmétique explicite : avec une inéquation)

Considérons la suite arithmétique décroissante  $u$  de terme général donné pour  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = -3n + 500$ . On veut déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $u_n < 100$ .

$$\begin{aligned} -3n + 500 &\leq 10 \\ -3n &\leq -490 \\ n &\geq 490 \div 3 \approx 163,33 \end{aligned}$$

Ainsi,  $u$  passe en-dessous de 10 à partir du rang 164.

Remarque 31 hors programme

Le problème de seuil dans le cas géométrique par inéquation nécessite la fonction *logarithme*, qui n'est pas au programme en Première. Chercher le seuil d'une suite géométrique revient à résoudre une inéquation avec une fonction *exponentielle de base a*, ce que vous ne savez pas faire.

$$48 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n < 1 \iff \left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{48} \iff 4^n > 48.$$

Quel outil est la réciproque de cette fonction « puissance de 4 » (ou *exponentielle de base 4*) ? On utilisera l'année prochaine (en maths comme en physique-chimie) la fonction logarithme, réciproque des fonctions exponentielles. Si les puissances ont pour propriété que  $a^n \times a^m = a^{n+m}$ , la fonction logarithme a la propriété réciproque :  $\ln(a^n) = \ln(a) \times n$ . Cela permettra dans ce cas là d'écrire :

$$\begin{aligned} 4^n &> 48 \\ \iff \ln(4^n) &> \ln(48) \\ \iff \ln(4) \times n &> \ln(48) \\ \iff n &> \frac{\ln(48)}{\ln(4)}. \end{aligned}$$

Un calcul (que la calculatrice effectuera) indique que  $\frac{\ln(48)}{\ln(4)} \approx 2,79$ , on retrouve donc ici que  $n > 3$ .

Méthode 32 (Avec Python – cas par récurrence)

Considérons la suite géométrique croissante  $u$  de terme initial  $u_0 = 2$  et de raison 1,5. Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 1,5 \times u_n$ . On cherche à savoir quand la suite  $u$  dépasse la valeur 100.

Le principe est le suivant : on stocke la valeur courante de  $u_n$  dans une variable, initialisée à  $u_0$ , que l'on met à jour dans une boucle. On souhaite mettre à jour la valeur de  $u_n$  tant que l'on n'a pas dépassé le seuil, tout en gardant trace du rang.

```
1  seuil ← 100
2  u ← 2
3  n ← 0
4  Tant que u <
5  seuil:
6    u ← 1,5 * u
7    n ← n + 1
8  Fin Tant que
9  Afficher n
```

```
1  seuil = 100
2  u = 2
3  n = 0
4  while u < seuil:
5      u = 1.5*u
6      n = n+1
7  print(n)
```

Méthode 33 (Avec Python – cas explicite)

Considérons la suite arithmétique décroissante  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 2000 - 9n$ . On cherche le rang à partir duquel  $u$  passe en-dessous de 0.

Le principe est le suivant : on teste chaque rang  $n$  un par un, tant que la valeur de  $u_n$  calculée à partir de  $n$  est au-dessus du seuil.

```
1  seuil ← 0
2  n ← 0
3  Tant que 2000 - 9*n >
4  seuil:
5    n ← n + 1
6  Fin Tant que
7  Afficher n
```

```
1  seuil = 100
2  n = 0
3  while 2000 - 9*n > seuil:
4      n = n+1
5  print(n)
```

5 – Python : poursuite du travail sur les listes

On a vu au chapitre 2 l'utilisation des listes, déclarée entre crochets et séparée par une virgule. Une liste est ordonnée (la liste  $[1,2]$  n'est pas la liste  $[2,1]$ ). On peut récupérer le premier élément d'une liste avec  $L[0]$ , ainsi de suite... et même le dernier élément avec  $L[-1]$ .

On peut définir une liste de trois façons :

- en extension : on énumère toutes les valeurs de la liste.  
 $L = [5, 8, 11, 14, 17, 20]$
- par ajouts successifs : on déclare un premier élément de la liste, puis on ajoute successivement ses termes (par exemple, dans une fonction, comme vu dans le Chapitre 2).

```
L = [5]
for i in range(5):
    u = L[-1] + 3
    L = L + L[u]
```

- en compréhension : on décrit les termes de la liste à l'aide d'une condition. Cela correspond d'ailleurs à une définition mathématique. L'ensemble

$$E = \{5 + 3n \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq n \leq 5\}$$

décrit les termes de la suite définie par  $5 + 3n$ , pour  $n$  entier entre 0 et 5. En Python, il est également possible de définir une liste en compréhension à l'aide d'une boucle **for** à l'intérieur de la définition de la liste :

```
L = [5+3*n for n in range(6)]
```

On peut également :

| Objectif                      | Commande Python              | Exemple avec $L = [5, 8, 11, 14, 17, 20]$     |
|-------------------------------|------------------------------|-----------------------------------------------|
| Créer une liste               | $L = [5, 8, 11, 14, 17, 20]$ | Liste de 6 éléments                           |
| Accéder à un élément          | $L[i]$                       | $L[0]$ vaut 5, $L[2]$ vaut 11                 |
| Connaître la longueur         | $len(L)$                     | $len(L)$ vaut 6                               |
| Ajouter un élément à la fin   | $L.append(23)$               | $L$ devient $[5, 8, 11, 14, 17, 20, 23]$      |
| Insérer un élément            | $L.insert(1, 6)$             | $L$ devient $[5, 6, 8, 11, 14, 17, 20]$       |
| Supprimer un élément (indice) | $del L[2]$                   | $L$ devient $[5, 8, 14, 17, 20]$              |
| Supprimer le dernier élément  | $L.pop()$                    | Supprime 20, $L$ devient $[5, 8, 11, 14, 17]$ |
| Supprimer et récupérer        | $L.pop(1)$                   | Supprime 8, $L$ devient $[5, 11, 14, 17, 20]$ |
| Supprimer une valeur          | $L.remove(14)$               | $L$ devient $[5, 8, 11, 17, 20]$              |
| Modifier un élément           | $L[0] = 100$                 | $L$ devient $[100, 8, 11, 14, 17, 20]$        |
| Parcourir les éléments        | $for x in L$                 | Affiche 5, 8, 11, 14, 17, 20                  |
| Tester la présence            | $11 in L$                    | Renvoie <b>True</b>                           |

## 6 – Pour aller (plus) loin (HP)

### Définition 34

Une suite *arithmético-géométrique* est une suite  $u$  vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$  une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

où  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$ .

### Exercice 35 (Explicitation d'une suite arithmético-géométrique)

- 1► Commençons sur un exemple concret : considérons la suite  $u$  définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 2$ .
  - a► On commence par réécrire la relation de récurrence de  $u$  en remplaçant  $u_n$  et  $u_{n+1}$  par la lettre  $\ell$  : cela donne l'équation  $\ell = 3\ell - 2$ . Vérifiez que  $\ell = 1$  en est la solution.
  - b► On définit la suite  $v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - \ell = u_n - 1$ . Vérifiez que  $v$  est géométrique de raison  $a = 3$ .
  - c► Explicitiez  $v$ .
  - d► Exprimez  $v_0$  en fonction de  $u_0$  et  $\ell$ .
  - e► Déduisez-en l'expression explicite de  $u$ .
- 2► Traitons maintenant le cas général avec les notations de la définition.
  - a► On commence par réécrire la relation de récurrence de  $u$  en remplaçant  $u_n$  et  $u_{n+1}$  par la lettre  $\ell$  : cela donne l'équation  $\ell = a\ell + b$ . Exprimez la solution de cette équation en fonction de  $a$  et  $b$ , en justifiant la validité de vos opérations.
  - b► On définit la suite  $v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - \ell$ . Vérifiez que  $v$  est géométrique de raison  $a$ .
  - c► Explicitiez  $v$ .
  - d► Exprimez  $v_0$  en fonction de  $u_0$  et  $\ell$ .
  - e► Déduisez-en l'expression explicite de  $u$ .